

第1讲 平行四边形与矩形

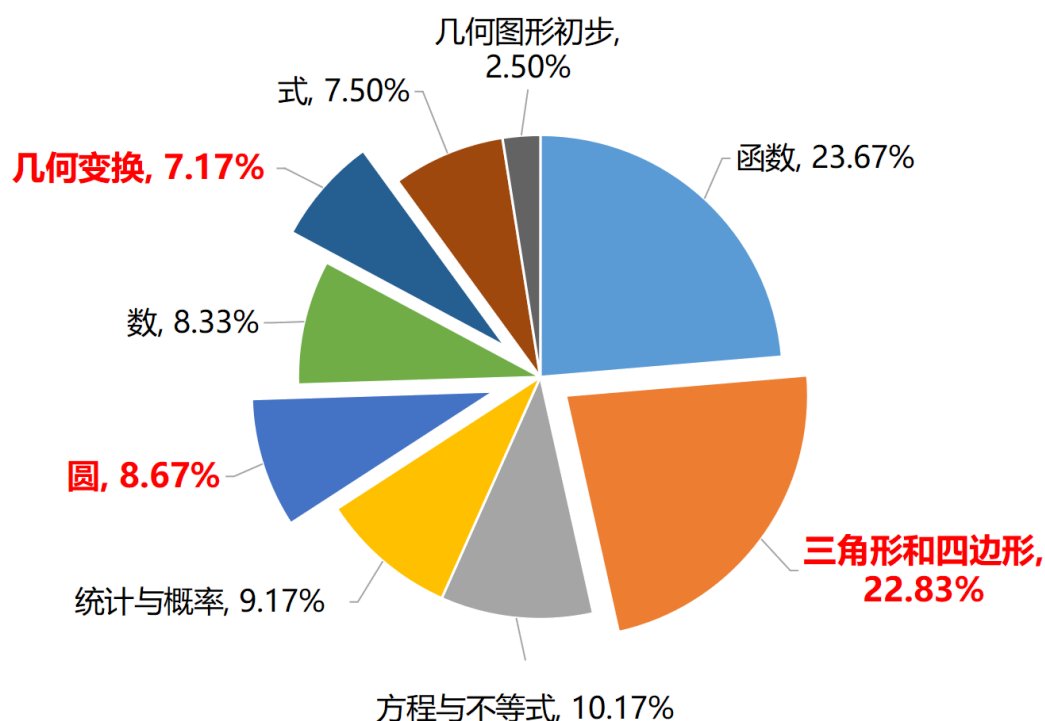
模块介绍:

《四边形与圆基础》属于整个初中数学几何部分的基础知识，对这部分知识的巩固将有助于后面对《三角形和四边形提高》、《圆综合》、《直角坐标系中的几何变换》等模块的学习，本模块的内容在中考中有一定占比，通常在选择、填空题中考察，在解答题21题中，常考察垂径定理、圆周角定理、切线性质的等，难度比较适中，需要学生打好基础。

本模块侧重于四边形的基本性质和判定以及圆中基础定理，适用于一轮复习，四边形、圆专项的查漏补缺，本模块分为平行四边形与矩形、菱形与正方形、圆的基础定理 3 讲内容，配套练习以几何为主，巩固同类型的习题，提高学生的综合运用能力。

知己知彼

16-20年天津中考考点占比



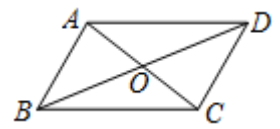
年份	分值	占比	题号
2020年	26	22%	8、17、21、24
2019年	26	22%	8、17、21、24
2018年	23	19%	11、21、24
2017年	23	19%	17、21、24
2016年	26	22%	10、17、21、24

一、平行四边形



教法备注

1.性质：

图形	性质		符号表示
平行四边形 $ABCD$ 	边	平行四边形的对边平行 平行四边形的对边相等	$AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$ $AB = CD$, $AD = BC$
	角	平行四边形的对角相等	$\angle DAB = \angle BCD$, $\angle ABC = \angle ADC$
	对角线	平行四边形的对角线互相平分	$OA = OC = \frac{1}{2}AC$, $OB = OD = \frac{1}{2}BD$
	对称性	中心对称图形	

【注意】做题时根据实际需要，只写出相应的性质即可。

2.判定:

{	边	{ ① 两组对边分别平行的四边形是平行四边形. ② 两组对边分别相等的四边形是平行四边形. ③ 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.
	角	两组对角分别相等的四边形是平行四边形.
	对角线	两条对角线互相平分的四边形是平行四边形.

【题型点拨】：

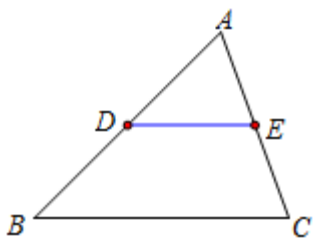
平行四边形判定的应用往往在：

- ①先判定是平行四边形，再应用其性质证明线段等、角等、直线平行、对角线互相平分等
- ②先判定是平行四边形，再应用其性质和其他知识（全等、勾股等）结合在一起考查，求线段长或角度

3.中位线定理

中位线定理：三角形的中位线平行于三角形的第三边，并且等于第三边的一半。

如图， $DE \parallel BC$ ， $DE = \frac{1}{2}BC$ 。



【证明】：

已知：如图，点 D ， E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB ， AC 的中点

求证： $DE \parallel BC$ ，且 $DE = \frac{1}{2}BC$

证明：延长 DE 到点 F ，使 $EF = DE$ ，连接 CF

$\because E$ 为 AC 中点

$\therefore AE = EC$

又 $\because \angle AED = \angle CEF$

$\therefore \underline{\hspace{2cm}} \cong \underline{\hspace{2cm}}$

$\therefore AD = CF$ ， $\angle A = \angle ECF$

$\therefore AB \parallel CF$

又 $\because D$ 为 AB 中点

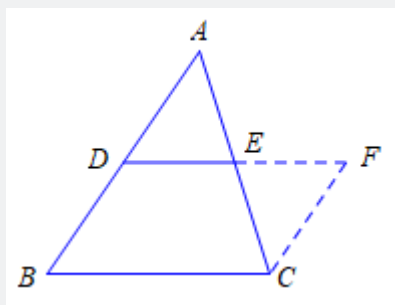
$\therefore AD = BD$

$\therefore BD = CF$

$\therefore$ 四边形 $DBCF$ 是 $\underline{\hspace{2cm}}$

$\therefore DF \parallel BC$ ， $DF = BC$

$\therefore DE \parallel BC$ ，且 $DE = \frac{1}{2}BC$

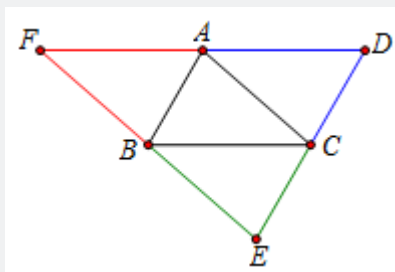


4. 平行四边形存在性：

已知点 A 、 B 、 C 是平面上不共线的三点，那么，以 A 、 B 、 C 为顶点，

可在平面上画出3个平行四边形。

作法：分别过 A 、 B 、 C 三点作对边 BC 、 AC 、 AB 的平行线，交点即为平行四边形的第四个顶点。如图，平行四边形 $ABCD$ 、 $ACBF$ 、 $ABEC$ 。



【与坐标系结合】：

若已知点 $A(x_A, y_A)$ ， $B(x_B, y_B)$ ， $C(x_C, y_C)$ ，确定点 D 的坐标

从平移的角度，

AD 平移得到 BC ，由平移坐标公式，

可得 $x_B - x_A = x_C - x_D$ ，

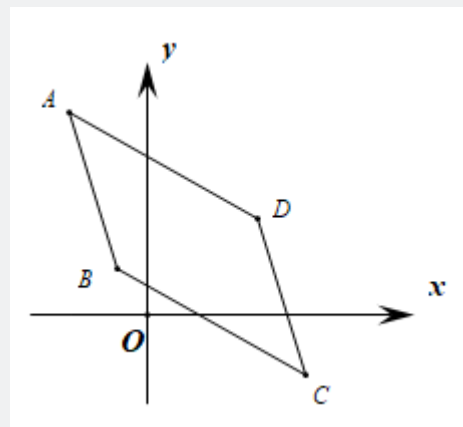
$$y_B - y_A = y_C - y_D；$$

或者 AB 平移得到 DC ，由平移坐标公式，

可得 $x_D - x_A = x_C - x_B$ ，

$$y_D - y_A = y_C - y_B，$$

$$\text{移项可得} \begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}.$$



【解题步骤】：

所有的平行四边形存在性问题，基本都可以利用上述模型求解，更重要的是实现盲解盲算，具体步骤如下：

①：写出或设出三个顶点的坐标；

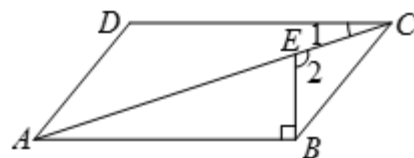
②：以“哪两个顶点相对”（即对角线）为分类标准，分三类讨论，
利用上述模型，求出第四个顶点的坐标；

③：将第四个顶点坐标代入相应的关系式即可。

|| 角度问题

💡 典题精练

1. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $BE \perp AB$ 交对角线 AC 于点 E ，若 $\angle 1 = 18^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数为（ ）。



A. 98°

B. 102°

C. 108°

D. 118°

【答案】C

【解析】 $\because ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AB \parallel DC，$$

$$\therefore \angle CAB = \angle 1 = 18^\circ，$$

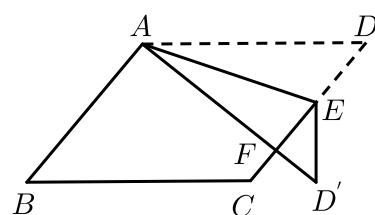
$$\begin{aligned} &\because BE \perp AB, \\ &\therefore \angle EBA = 90^\circ, \\ &\therefore \angle 2 = \angle CAB + \angle EBA = 18^\circ + 90^\circ = 108^\circ. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】根据平行四边形边的性质计算与证明

【重点强调】

2017年天津河北区初三二模第10题3分

2. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， E 为边 CD 上一点，将 $\triangle ADE$ 沿 AE 折叠至 $\triangle AD'E$ 处， AD' 与 CE 交于点 F ．若 $\angle B = 52^\circ$ ， $\angle DAE = 20^\circ$ ，则 $\angle FED'$ 的大小为（ ）．



- A. 20° B. 36° C. 52° D. 72°

【答案】B

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore \angle D = \angle B = 52^\circ,$$

由折叠的性质可得 $\angle D' = \angle D = 52^\circ$ ，

$$\angle EAD' = \angle DAE = 20^\circ,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle D + \angle DAE = 52^\circ + 20^\circ = 72^\circ,$$

$$\angle AED' = 180^\circ - \angle EAD' - \angle D' = 108^\circ,$$

$$\therefore \angle FED' = 108^\circ - 72^\circ = 36^\circ.$$

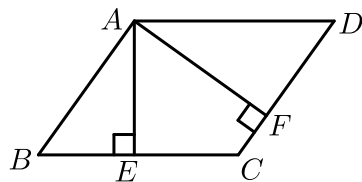
【标注】【知识点】平行四边形性质综合应用

【重点强调】

2017年天津西青区初三二模第10题3分

过关斩将

3. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $AE \perp BC$ 于点 E ， $AF \perp CD$ 于点 F ．若 $\angle EAF = 56^\circ$ ，则 $\angle B =$ ____ 度．



【答案】 56

【解析】 $\because AE \perp BC, AF \perp CD,$

$$\therefore \angle AEC = \angle AFC = 90^\circ,$$

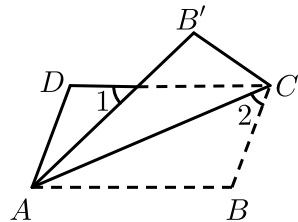
$$\text{在四边形} AECF \text{中}, \angle C = 360^\circ - \angle EAF - \angle AEC - \angle AFC = 360^\circ - 56^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 124^\circ$$

$$\text{在平行四边形} ABCD \text{中}, \angle B = 180^\circ - \angle C = 180^\circ - 124^\circ = 56^\circ.$$

故答案为：56.

【标注】 【知识点】 根据平行四边形角的性质计算与证明

4. 如图，将平行四边形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折叠，使点 B 落在 B' 处，若 $\angle 1 = \angle 2 = 44^\circ$ ，则 $\angle B$ 为 _____ $^\circ$.



【答案】 114

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle BAC,$$

$$\text{由折叠的性质得: } \angle BAC = \angle B'AC,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ACD = \angle B'AC = \frac{1}{2} \angle 1 = 22^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 180^\circ - \angle 2 - \angle BAC = 180^\circ - 44^\circ - 22^\circ = 114^\circ.$$

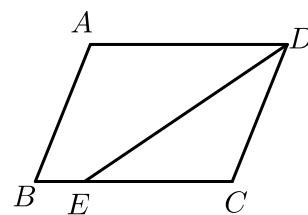
【标注】 【知识点】 四边形与折叠问题

|| 线段问题

👤 典题精练

5.

如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，已知 $AD = 8\text{cm}$ ， $AB = 6\text{cm}$ ， DE 平分 $\angle ADC$ 交 BC 边于点 E ，则 BE 等于（ ）。



- A. 2cm B. 4cm C. 6cm D. 8cm

【答案】 A

【解析】 根据平行四边形的性质得 $AD \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle EDA = \angle DEC,$$

又 $\because DE$ 平分 $\angle ADC$ ，

$$\therefore \angle EDC = \angle ADE,$$

$$\therefore \angle EDC = \angle DEC,$$

$$\therefore CD = CE = AB = 6\text{cm},$$

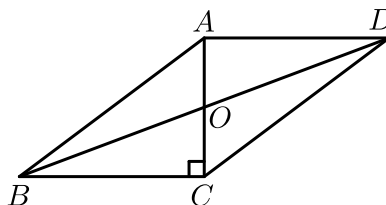
$$\text{即 } BE = BC - EC = 8\text{cm} - 6\text{cm} = 2\text{cm}.$$

【标注】【知识点】平行四边形与角平分线结合

【重点强调】

2015年天津宁河县初三二模第11题3分

6. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC ， BD 相交于点 O ， $AB = 10$ ， $AD = 8$ ， $AC \perp BC$ ，对角线 BD 的长是 _____。



【答案】 $2\sqrt{73}$

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$$\therefore AD = BC = 8,$$

AC 和 BD 互相平分，

$$\begin{aligned}
 &\text{在Rt}\triangle ABC\text{中,} \\
 &AC = \sqrt{AB^2 - BC^2}, \\
 &= \sqrt{100 - 64} = 6, \\
 &\therefore OC = \frac{1}{2}AC = 3, \\
 &\text{在Rt}\triangle BOC\text{中,} \\
 &OB = \sqrt{OC^2 + BC^2}, \\
 &= \sqrt{9 + 64} = \sqrt{73}, \\
 &\therefore BD = 2\sqrt{73}.
 \end{aligned}$$

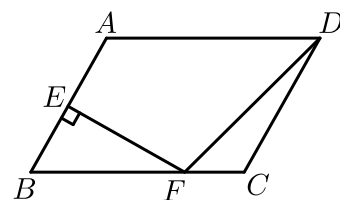
【标注】【知识点】根据平行四边形边的性质计算与证明

【重点强调】

2017年天津北辰区初三一模第17题3分

过关斩将

7. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB = 6$, $AD = 8$, $\angle ABC = 60^\circ$, 点 E 是 AB 的中点, $EF \perp AB$ 交 BC 于 F , 连接 DF , 则 DF 的长为() .



A. $2\sqrt{13}$

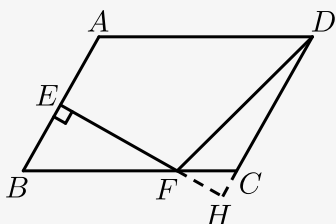
B. 8

C. $5\sqrt{2}$

D. 10

【答案】A

【解析】延长 DC , EF 相交于点 H ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
 $\therefore AB \parallel DC$, $AB = CD = 6$, $AD = BC = 8$,
 $\because EF \perp AB$,
 $\therefore \angle B = \angle FCH = 60^\circ$, $\angle BEF = \angle H = 90^\circ$,

$$\therefore \angle BFE = \angle CFH = 30^\circ ,$$

$\therefore E$ 是 AB 的中点 ,

$$\therefore BE = AE = \frac{1}{2}AB = 3 ,$$

$$\therefore BF = 2BE = 6 ,$$

$$\therefore CF = BC - BF = 2 ,$$

$$\therefore CH = \frac{1}{2}CF = 1 ,$$

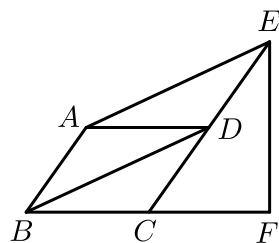
$$\therefore FH = \sqrt{CF^2 - CH^2} = \sqrt{3} , DH = CD + CH = 6 + 1 = 7 ,$$

$$\therefore DF = \sqrt{DH^2 + FH^2} = 2\sqrt{13} .$$

故答案选：A .

【标注】【知识点】平行四边形性质综合应用

8. 如图，平行四边形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = 60^\circ$ ， E 、 F 分别在 CD 和 BC 的延长线上， $AE \parallel BD$ ， $EF \perp BC$ ， $EF = \sqrt{3}$ ，则 AB 的长是 _____ .



【答案】 1

【解析】 可知四边形 $ABDE$ 为平行四边形，

$$\therefore AB = DE ,$$

$$\therefore AB = CD ,$$

$$\therefore DE = CD , \text{ 即 } D \text{ 为 } CE \text{ 的中点} ,$$

$$\therefore EF \perp BC ,$$

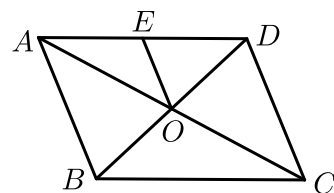
$$\therefore \angle EFC = 90^\circ , AB \parallel CE ,$$

$$\therefore \angle ECF = \angle ABC = 60^\circ ,$$

$$\therefore CE = 2 , AB = CD = \frac{1}{2}CE = 1 .$$

【标注】【知识点】 30° 特殊角的性质应用；平行四边形性质综合应用

9. 如图，平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC ， BD 相交于点 O ，点 E 是边 AD 的中点，若 $\triangle BCD$ 的周长为18，则 $\triangle DEO$ 的周长是 _____ 。



【答案】 9

【解析】 $\because E$ 为 AD 中点，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore DE = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC, DO = \frac{1}{2}BD, AO = CO,$$

$$\therefore OE = \frac{1}{2}CD,$$

$\because \triangle BCD$ 的周长为18，

$$\therefore BD + DC + BC = 18,$$

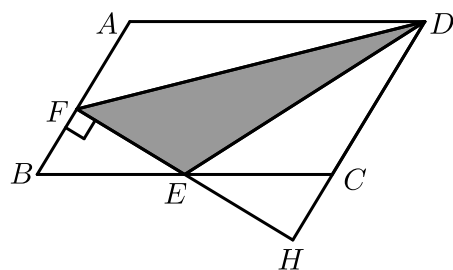
$$\therefore \triangle DEO \text{的周长是 } DE + OE + DO = \frac{1}{2}(BC + DC + BD) = \frac{1}{2} \times 18 = 9.$$

【标注】【知识点】平行四边形性质综合应用

【重点强调】

2017年天津北辰区初三一模第17题3分

10. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $AB = 3$ ， $AD = 4$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ，过 BC 的中点 E 作 $EF \perp AB$ ，垂足为点 F ，与 DC 的延长线相交于点 H ，则 $\triangle DEF$ 的面积是 _____ 。



【答案】 $2\sqrt{3}$

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AD = BC = 4, AB \parallel CD, AB = CD = 3,$$

$\because E$ 为 BC 中点，

$$\therefore BE = CE = 2,$$

$$\because \angle B = 60^\circ, EF \perp AB,$$

$$\therefore \angle FEB = 30^\circ,$$

$$\therefore BF = 1,$$

由勾股定理得： $EF = \sqrt{3}$,

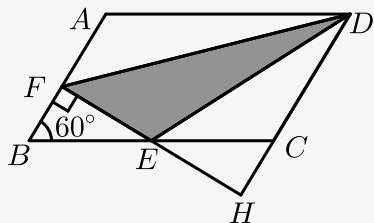
$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \triangle BFE \cong \triangle CHE,$$

$$\therefore EF = EH = \sqrt{3}, CH = BF = 1,$$

$$\therefore S_{\triangle DHF} = \frac{1}{2} DH \cdot FH = \frac{1}{2} \times (1+3) \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3},$$

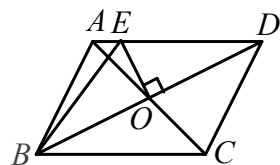
$$\therefore S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} S_{\triangle DHF} = 2\sqrt{3}.$$



【标注】【知识点】平行四边形性质综合应用

过关斩将

11. 如图，在周长为20cm的平行四边形ABCD中， $AB \neq AD$ ，AC，BD相交于点O， $OE \perp BD$ 交AD于E，则 $\triangle ABE$ 的周长为 _____ cm.



【答案】10

【解析】 $\because AC, BD$ 相交于点O，

$\therefore O$ 为BD的中点，

$\therefore OE \perp BD$ ，

$\therefore BE = DE$ ，

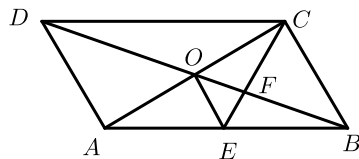
$$\triangle ABE \text{的周长} = AB + AE + BE = AB + AD = \frac{1}{2} \times 20 = 10\text{cm},$$

$\triangle ABE$ 的周长为10cm.

故答案为10.

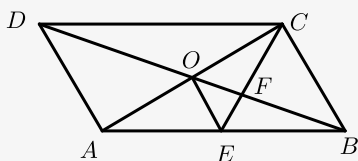
【标注】【知识点】利用平行四边形对角线的性质计算与证明

12. 如图, 平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC , BD 交于点 O , CE 平分 $\angle BCD$ 交 AB 于点 E , 交 BD 于点 F , 且 $\angle ABC = 60^\circ$, $AB = 2BC$, 连接 OE , 下列结论:
- ① $\angle ACD = 30^\circ$; ② $S_{\text{平行四边形}ABCD} = AC \cdot BC$; ③ $OE : AC = \sqrt{3} : 6$; ④ $S_{\triangle OEF} = \frac{1}{12} S_{\text{平行四边形}ABCD}$.
- 成立的是 _____ .



【答案】 ①②③

【解析】 $\because CE$ 平分 $\angle DCB$, $\angle ABC = 60^\circ$,



$$\therefore \angle DCE = \angle ECB = \angle B = 60^\circ,$$

$$\text{又} \because AB = 2BC,$$

$$\therefore AE = EC = EB = BC,$$

$$\therefore \angle EAC = \angle ACD = 30^\circ, \text{①正确};$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$S_{\text{平行四边形}ABCD} = 2 \times \frac{1}{2} \times AC \times BC = AC \cdot BC, \text{②正确};$$

$$\therefore AO = OC,$$

$$\therefore EO \perp AC,$$

$$\therefore OE = \frac{1}{2} AE = \frac{\sqrt{3}}{3} AO = \frac{\sqrt{3}}{6} AC,$$

$$\therefore OE : AC = \sqrt{3} : 6, \text{③正确};$$

$$\because O, E \text{ 为中点},$$

$$\therefore OE \parallel \frac{1}{2} BC,$$

$$S_{\triangle OEF} : S_{\triangle FBC} = 1 : 4,$$

$$S_{\triangle AOE} : S_{\triangle ABC} = 1 : 4,$$

$$\therefore S_{\triangle OEF} = \frac{1}{2} \cdot OE \cdot h$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} BC \cdot \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} AC$$

$$= \frac{1}{24} S_{\text{平行四边形}ABCD}, \text{故④错误};$$

故答案为: ①②③.

【标注】 【知识点】平行四边形性质综合应用

典题精练

13. 若平行四边形的三个顶点的坐标分别为 $O(0,0)$ 、 $A(2,0)$ 、 $B(1,1)$ ，则第四个顶点 C 的坐标为 _____ 或 _____ 或 _____ .

【答案】 $(3,1)$; $(-1,1)$; $(1,-1)$

【解析】 当 $BC \parallel OA$, $BC = OA$ 时 , C 和 B 的纵坐标相等 ,

若选择 AB 为对角线 , 则 $C_1(3,1)$;

若选择 OB 为对角线 , 则 $C_2(-1,1)$;

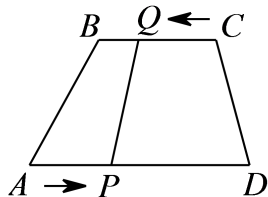
当 $AB \parallel OC$, $AB = OC$ 时 ,

选择 OA 为对角线 , 则 $C_3(1,-1)$.

故第四个顶点坐标是 : $C_1(3,1)$, $C_2(-1,1)$, $C_3(1,-1)$.

【标注】 【知识点】 平行四边形的性质

14. 如图 , 在四边形 $ABCD$ 中 , $AD \parallel BC$, 且 $AD > BC$, $BC = 6\text{cm}$, $AD = 10\text{cm}$, P , Q 分别从 A 、 C 两点同时出发 , P 以 2cm/s 的速度由 A 向 D 运动 , Q 以 1cm/s 的速度由 C 向 B 运动 , 当其中一个点到达终点时 , 另一个点也随之停止 , 经过 _____ 秒 , 直线 PQ 将四边形 $ABCD$ 截出一个平行四边形 .



【答案】 2 或 $\frac{10}{3}$

【解析】 设点 P , Q 运动的时间为 t s , 依题意有 :

$$CQ = t , BQ = 6 - t , AP = 2t , PD = 10 - 2t ;$$

$$\because AD \parallel BC ,$$

$$\therefore \text{①当 } BQ = AP \text{ 时 , 四边形 } APQB \text{ 是平行四边形 , 即 } 6 - t = 2t , \text{ 解得 } t = 2 ;$$

$$\text{②当 } CQ = PD \text{ 时 , 四边形 } CQPD \text{ 是平行四边形 , 即 } t = 10 - 2t , \text{ 解得 } t = \frac{10}{3} .$$

所以当 2 或 $\frac{10}{3}$ 秒时 , 直线 QP 将四边形截出一个平行四边形 .

故答案为 : 2 或 $\frac{10}{3}$.

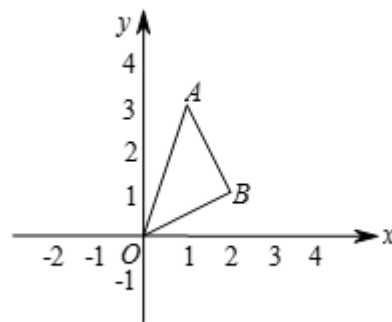
【标注】【知识点】动点与梯形的问题

【重点强调】

2017~2018学年3月天津河西区天津市第四十二中学初二下学期月考第16题3分

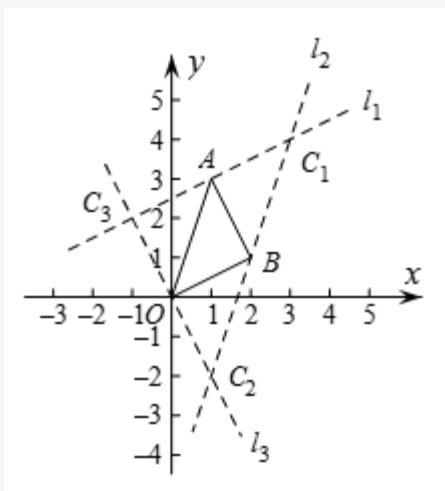
过关斩将

15. 如图在平面直角坐标系中， O 为坐标原点， $A(1,3)$ ， $B(2,1)$ ，直角坐标系中存在点 C ，使得点 O ， A ， B ， C 四点构成平行四边形，则 C 点坐标为 _____ .

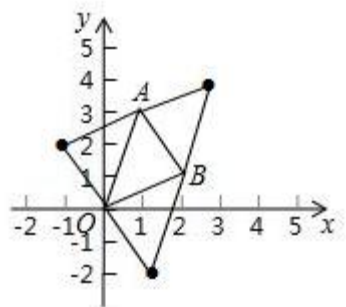


【答案】 $(3,4)$ ， $(1,-2)$ ， $(-1,2)$

【解析】方法一：如图，分别过 A 、 B 、 C 三点作 $l_1//OB$ 、 $l_2//OA$ 、 $l_3//AB$ ，分别交于点 C_1 、 C_2 、 C_3 为所求，又平移的性质可得： $C_1(3,4)$ ， $C_2(1,-2)$ ， $C_3(-1,2)$.



方法二：如图所示：



$\therefore$ 以 O 、 A 、 B 、 C 为顶点的四边形是平行四边形， $O(0,0)$ ， $A(1,3)$ ， $B(2,1)$ ，

$\therefore$ 三种情况：

①当 AB 为对角线时，点 C 的坐标为 $(3,4)$ ；

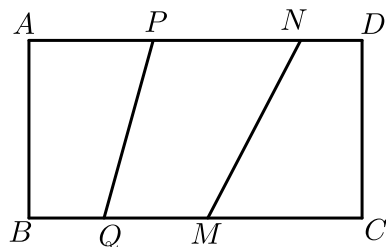
②当 OB 为对角线时，点 C 的坐标为 $(1,-2)$ ；

③当 OA 为对角线时，点 C 的坐标为 $(-1,2)$ ；

故答案为 $(3,4)$ 或 $(1,-2)$ 或 $(-1,2)$ 。

【标注】【知识点】平行四边形的存在性

16. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $BC = 20\text{cm}$ ， P 、 Q 、 M 、 N 分别从 A 、 B 、 C 、 D 出发沿 AD 、 BC 、 CB 、 DA 方向在矩形的边上同时运动，当有一个点先到达所在运动边的另一个端点时，所有点都停止运动，已知在相同时间内，若 $BQ = x\text{cm}$ ($x \neq 0$) 则 $AP = 2x\text{cm}$ ， $CM = 3x\text{cm}$ ， $DN = x^2\text{cm}$ 。



- (1) 是否存在一个时刻，使点 Q 与点 M 相遇？如果存在，请求出相遇时 x 的值；如果不存在，请说明理由。
- (2) 当 x 为何值时，以 P 、 Q 、 M 、 N 为顶点的四边形是平行四边形。

【答案】 (1) 不存在，证明见解析。

(2) 当 $x = 2$ 或 $x = 4$ 时，以 P 、 Q 、 M 、 N 为顶点的四边形是平行四边形。

【解析】 (1) 不存在，理由如下：

当 Q 与 M 相遇时，

即 $x + 3x = 20$ ，

$x = 5$ ，

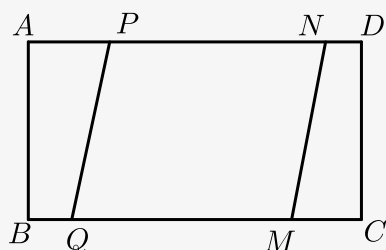
当 $x = 5$ 时，

$$DN = x^2 = 5^2 = 25 > 20 ,$$

∴不存在 .

(2) 由题意可知 , 点 Q 只能在点 M 的左侧 ,

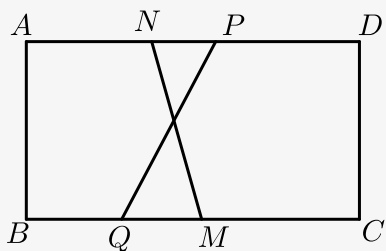
①当点 P 在点 N 的左侧时 ,



$$\text{由 } 20 - (x + 3x) = 20 - (2x + x^2), \text{ 解得 } x = 0 \text{ (舍去) 或 } x = 2 .$$

当 $x = 2$ 时四边形 $PQMN$ 是平行四边形 .

②当点 P 在点 N 的右侧时 ,



$$\text{由 } 20 - (x + 3x) = (2x + x^2) - 20 ,$$

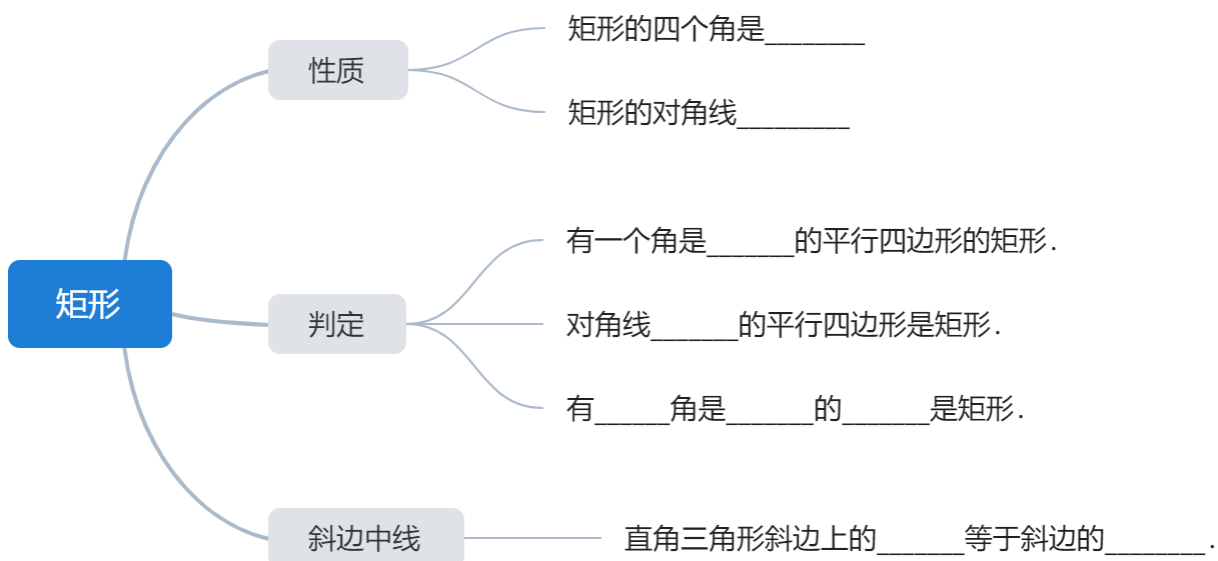
$$\text{解得 } x = -10 \text{ (舍去) 或 } x = 4 .$$

当 $x = 4$ 时四边形 $NQMP$ 是平行四边形 .

所以当 $x = 2$ 或 $x = 4$ 时 , 以 P, Q, M, N 为顶点的四边形是平行四边形 .

【标注】【知识点】动点与特殊平行四边形问题

二、 矩形



教法备注

1.性质

图形	性质		符号表示
矩形$ABCD$	边	对边平行且相等	$AB = CD, AD = BC$ $AB \parallel CD, AD \parallel BC$
	角	四个角都是直角	$\angle ABC = \angle BCD$ $= \angle CDA = \angle DAB = 90^\circ$
	对角线	对角线相等 对角线互相平分	$AC = BD$ $OA = OC = OB = OD$

【注】：加粗部分是矩形特有的性质

已知四边形 $ABCD$ 是矩形，图中有4个直角三角形，分别是

$\text{Rt}\triangle ABC \cong \text{Rt}\triangle BAD \cong \text{Rt}\triangle DCB \cong \text{Rt}\triangle CDA$

有4个等腰三角形，分别是 $\triangle AOB \cong \triangle COD$ ， $\triangle AOD \cong \triangle COB$

所以，矩形的有关问题可以转化为等腰三角形和直角三角形（利用勾股定理）来解决

2.判定

判定1：有一个角是直角的平行四边形是矩形

判定2：对角线相等的平行四边形是矩形

判定3：有三个角是直角的四边形是矩形

【总结】

①证明一个四边形是矩形，一般情况下，先证明它是一个平行四边形，然后证明“一个内角是直角”或“对角线相等”即可。

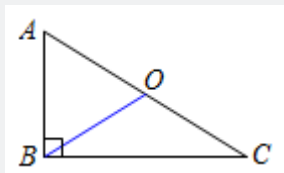
②若直接证明一个四边形是矩形，只要证明“三个内角是直角”即可。

3.斜边中线

由矩形的性质可以推出，

直角三角形的性质：**直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半。**

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $OA = OC$ ，则 $OB = OA = OC = \frac{1}{2}AC$ 。



书写：

$\because \triangle ABC$ 是直角三角形， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $OA = OC$ ，

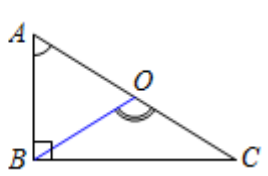
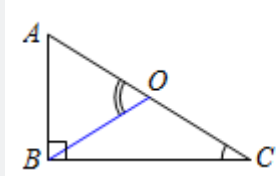
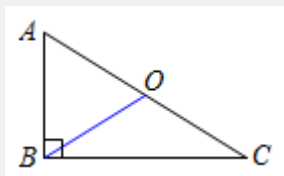
$\therefore OB = OA = OC = \frac{1}{2}AC$ 。

【拓展】

(1) 已知，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $OA = OB$ ，则 $OA = OC$ 。

(2) 已知，在 $\triangle ABC$ 中， $OA = OB = OC$ ，则 $\angle ABC = 90^\circ$ 。

(3) 已知， $\triangle ABC$ 是直角三角形， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $OA = OC$ ，则 $\angle AOB = 2\angle C$ ， $\angle BOC = 2\angle A$ 。



【总结】

①在直角三角形中，如果遇到斜边中点，优先考虑应用直角三角形斜边中线的性质。

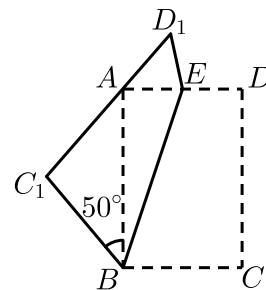
②直角三角形斜边中线一般可以用来证明线段的倍分关系及角的倍分关系。

③注意一定在已知直角三角形的前提下才能应用直角三角形斜边中线的性质。

|| 角度问题

🔗 典题精练

17. 如图，将一个矩形纸片 $ABCD$ ，沿着 BE 折叠，使 C 、 D 两点分别落在点 C_1 、 D_1 处。若 $\angle C_1BA = 50^\circ$ ，则 $\angle ABE$ 的度数为（ ）。



A. 15°

B. 20°

C. 25°

D. 30°

【答案】 B

【解析】 由折叠性质可得 $\angle CBE = \angle C_1BE$,

$$\angle C_1BA + \angle ABC = 2\angle C_1BC = \angle CBE + \angle C_1BE ,$$

$$\therefore 50^\circ + 90^\circ = 2\angle C_1BE ,$$

$$\angle C_1BE = 70^\circ ,$$

$$\angle ABE = \angle C_1BE - \angle C_1BA ,$$

$$\angle ABE = 20^\circ .$$

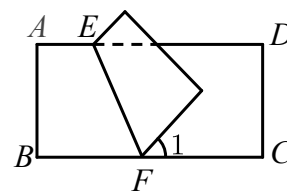
【标注】 【知识点】 其它翻折问题

【重点强调】

2019年天津东丽区初三一模第9题3分

过关斩将

18. 如图，在平面内，把矩形 $ABCD$ 沿 EF 对折，若 $\angle 1 = 50^\circ$ ，则 $\angle AEF$ 等于 () .



A. 115°

B. 130°

C. 120°

D. 65°

【答案】 A

【解析】 $\because \angle 1 = 50^\circ$,

$$\therefore \angle AEF = 180^\circ - \angle BFE = 180^\circ - (180^\circ - 50^\circ) \div 2 = 115^\circ .$$

故选：A .

【标注】 【知识点】 矩形的性质

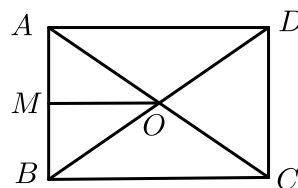
【知识点】平行线相关折叠问题

【知识点】轴对称的定义

|| 线段问题

🔗 典题精练

19. 如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC ， BD 相交于点 O ，点 M 是 AB 的中点，若 $OM = 4$ ， $AB = 6$ ，则 BD 的长为（ ）。



A. 4

B. 5

C. 8

D. 10

【答案】D

【解析】∵ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

$$\therefore BD = AC,$$

又∵ $AO = BO$ ， M 为 AB 中点，

∴ 在等腰三角形 ABO 中，

$$AM = BM = \frac{1}{2}AB = 3, \text{ 且 } OM \perp AB.$$

$$\therefore \text{在Rt}\triangle AMO \text{中}, AO = \sqrt{OM^2 + AM^2} = 5,$$

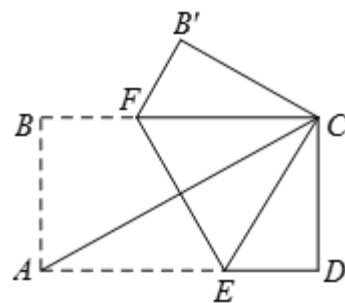
$$\therefore AC = 2AO = 10 = BD.$$

【标注】【知识点】矩形的性质

【重点强调】

2018年天津津南区初三二模第10题3分

20. 如图，将矩形纸片 $ABCD$ 折叠，使点 A 与点 C 重合，折痕为 EF ，点 B 的对应点为 B' ，则下列结论不一定成立的是（ ）。



- A. $\angle B' = \angle B = 90^\circ$ B. $AE = CE$ C. $\angle FCB' = \angle FCA$ D. $CF = CE$

【答案】 C

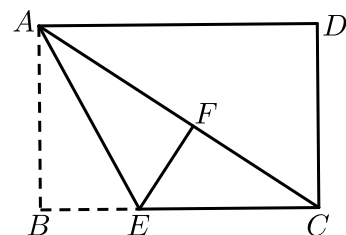
【解析】 由折叠可知 $\angle B = \angle B' = 90^\circ$,
A正确 ,
AC为对应顶点的连线 ,
由于折痕会垂直平分对应点连线的线段 ,
B正确 ,
令AC与EF交于O点 ,
则可证明 $\triangle COF \cong \triangle AOE$,
可得 $CF = AE$,
结合上面的结论可得D正确 .

【标注】 【知识点】 其它翻折问题

【重点强调】

2017年天津津南区初三一模第11题3分

21. 如图，在矩形纸片 $ABCD$ 中， $AB = 3$ ，点 E 在边 BC 上，将 $\triangle ABE$ 沿直线 AE 折叠，点 B 恰好落在对角线 AC 上的点 F 处，若 $\angle EAC = \angle ECA$ ，则 AC 的长是（ ）。



- A. $3\sqrt{3}$ B. 6 C. 5 D. 4

【答案】 B

【解析】∵将 $\triangle ABE$ 沿直线 AE 折叠，点 B 恰好落在对角线 AC 上的点 F 处，

$$\therefore AF = AB, \angle AFE = \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore EF \perp AC,$$

$$\therefore \angle EAC = \angle ECA,$$

$$\therefore AE = CE,$$

$$\therefore AF = CF,$$

$$\therefore AC = 2AB = 6.$$

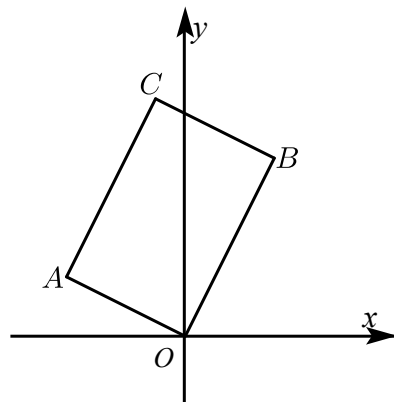
故选：B.

【标注】【知识点】矩形的性质

【重点强调】

2020年天津和平区初三二模第9题3分

22. 如图，在矩形 $AOBC$ 中，点 A 的坐标是 $(-2, 1)$ ，点 C 的纵坐标是4，则 B 、 C 两点的坐标分别是_____.



【答案】 $B\left(\frac{3}{2}, 3\right), C\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$

【解析】直线 OA 的斜率： $\frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$ ，

$$\therefore AC \perp OA,$$

$$\therefore AC \text{ 的斜率为 } 2,$$

$$\therefore AC \text{ 的解析式：} y = 2(x + 2) + 1,$$

$$\text{由 } y = 2(x + 2) + 1 = 4 \text{ 得到 } x = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore C\left(-\frac{1}{2}, 4\right),$$

$$\therefore \text{向量 } CA = BO = \left(-\frac{1}{2} + 2, 4 - 1\right),$$

$$\therefore B\left(\frac{3}{2}, 3\right).$$

【标注】【知识点】矩形的性质

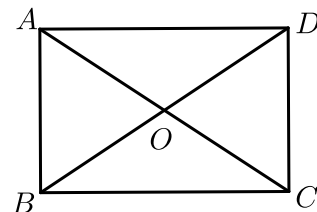
【知识点】一次函数与实际问题

【重点强调】

2016年天津河西区初三毕业考试第17题3分

过关斩将

23. 如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 $AC = 8\text{cm}$ ， $\angle AOD = 120^\circ$ ，则 AB 的长为（ ）。



A. $\sqrt{3}\text{cm}$

B. 2cm

C. $2\sqrt{3}\text{cm}$

D. 4cm

【答案】D

【解析】在矩形 $ABCD$ 中， $AO = BO = \frac{1}{2}AC = 4\text{cm}$ ，

$\because \angle AOD = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle AOB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle AOB$ 是等边三角形，

$\therefore AB = AO = 4\text{cm}$ 。

故选D。

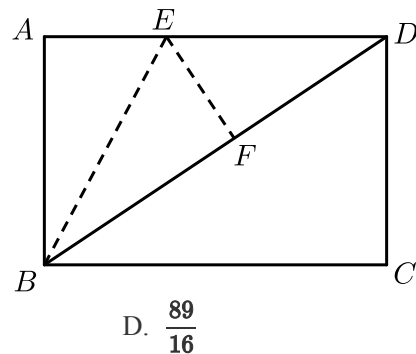
【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】矩形的性质

【重点强调】

2016~2017学年天津滨海新区初二下学期期中第8题3分

24. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $BC = 8$ ， $CD = 6$ ，将 $\triangle ABE$ 沿 BE 折叠，使点 A 恰好落在对角线 BD 上 F 处，则 DE 的长是（ ）。



A. 3

B. $\frac{24}{5}$

C. 5

D. $\frac{89}{16}$

【答案】 C

【解析】 $\because$ 矩形 $ABCD$,

$\therefore \angle BAD = 90^\circ$,

由折叠可得 $\triangle BFE \cong \triangle BAE$,

$\therefore EF \perp BD$, $AE = EF$, $AB = BF$,

在 $Rt\triangle ABD$ 中 , $AB = CD = 6$, $BC = AD = 8$,

根据勾股定理得 : $BD = 10$, 即 $FD = 10 - 6 = 4$,

设 $EF = AE = x$ 则有 $ED = 8 - x$,

根据勾股定理得 : $x^2 + 4^2 = (8 - x)^2$,

解得 : $x = 3$,

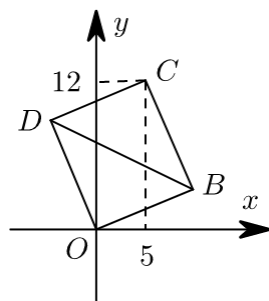
则 $DE = 8 - 3 = 5$, 故选 C .

【标注】 【知识点】 四边形与折叠问题

【重点强调】

2018年天津西青区初三一模第10题3分

25. 如图 , 矩形 $OBCD$ 的顶点 C 的坐标为 $(5, 12)$, 则 $BD =$ _____ .



【答案】 13

【解析】 由 C 的坐标可以得到 $OC = 13$,

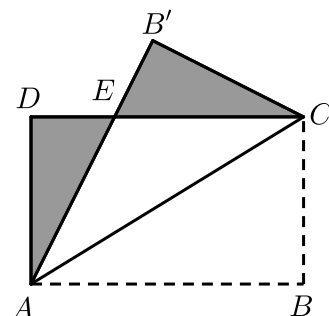
根据矩形对角线相等的性质可以得到 $BD = OC = 13$.

【标注】【知识点】矩形的性质

【思想】数形结合思想

经典再现

26. 如图，把一张矩形纸片 $ABCD$ 沿对角线 AC 折叠，点 B 的对应点为 B' ， AB' 与 DC 相交于点 E ，则下列结论一定正确的是（ ）.



A. $\angle DAB' = \angle CAB'$ B. $\angle ACD = \angle B'CD$ C. $AD = AE$

D. $AE = CE$

【答案】D

【解析】∵ 矩形纸片 $ABCD$ 沿对角线 AC 折叠，点 B 的对应点为 B' ，

$$\therefore \angle BAC = \angle CAB' ,$$

$$\because AB // CD ,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ACD ,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle CAB' ,$$

$$\therefore AE = CE .$$

【标注】【知识点】四边形与折叠问题

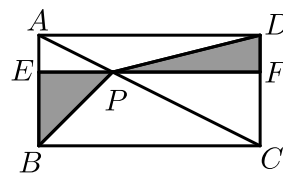
【重点强调】

2016年中考第10题（3分）

翻折与全等，平行线加角平分线推导等腰三角形

|| 周长面积问题

27. 如图，点 P 是矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 上一点，过点 P 作 $EF // BC$ ，分别交 AB ， CD 于 E 、 F ，连接 PB 、 PD 。若 $AE = 2$ ， $PF = 8$ 。则图中阴影部分的面积为（ ）.



A. 10

B. 12

C. 16

D. 18

【答案】C

【解析】如图，作 $PM \perp AD$ 交 AD 于点 M ，交 BC 于点 N ，

则有四边形 $AEPM$ ，四边形 $DFPM$ ，四边形 $CFPN$ ，四边形 $BEPN$ 都是矩形，

$$\therefore S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ABC}, S_{\triangle AMP} = S_{\triangle AEP}, S_{\triangle PBE} = S_{\triangle PBN},$$

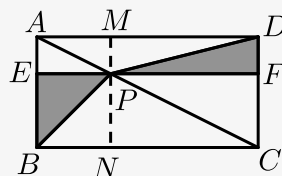
$$S_{\triangle PFD} = S_{\triangle PDM}, S_{\triangle PFC} = S_{\triangle PCN},$$

$$\therefore S_{\triangle DFP} = \frac{1}{2}(S_{\triangle ADC} - S_{\triangle AMP} - S_{\triangle PFC}), S_{\triangle PBE} = \frac{1}{2}(S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AEP} - S_{\triangle PCN}),$$

$$\therefore S_{\triangle DFP} = S_{\triangle PBE} = \frac{1}{2} \times 2 \times 8 = 8,$$

$$\therefore S_{\text{阴}} = 8 + 8 = 16.$$

故选C.



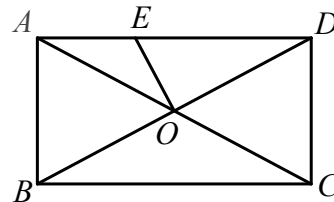
【标注】【能力】运算能力

【知识点】矩形的性质

【重点强调】

2019年天津河北区初三二模第11题3分

28. 如图，矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC ， BD 相交于点 O ，过点 O 作 $OE \perp BD$ 交 AD 于点 E ，已知 $AB = 2$ ， $\triangle DOE$ 的面积为 $\frac{5}{4}$ ，则 AE 的长为（ ）.



A. $\sqrt{5}$

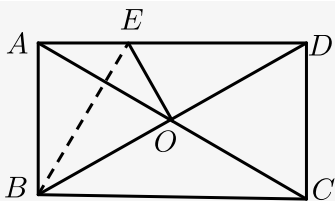
B. 2

C. 1.5

D. $\sqrt{2}$

【答案】C

【解析】连接 BE ，如图所示：



由题意可得， OE 为对角线 BD 的垂直平分线，

$$\therefore BE = DE, S_{\triangle BOE} = S_{\triangle DOE} = \frac{5}{4},$$

$$\therefore S_{\triangle BDE} = 2S_{\triangle BOE} = \frac{5}{2}.$$

$$\therefore \frac{1}{2}DE \cdot AB = \frac{5}{2},$$

$$\text{又} \because AB = 2,$$

$$\therefore DE = \frac{5}{2},$$

$$\therefore BE = \frac{5}{2},$$

$$\text{在Rt}\triangle ABE\text{中，由勾股定理得：} AE = \sqrt{BE^2 - AB^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2^2} = 1.5.$$

故选C.

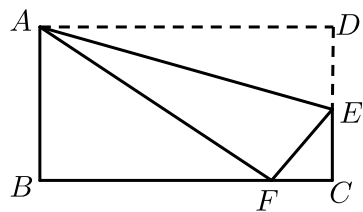
【标注】【知识点】矩形的性质

【重点强调】

2018~2019学年天津河西区初二下学期期中（第三学片）第11题3分

29. 如图，折叠矩形 $ABCD$ 的一边 AD ，使点 D 落在 BC 边的点 F 处，已知折痕 $AE = 5\sqrt{5}\text{cm}$ ，且

$$\tan \angle EFC = \frac{3}{4}, \text{则矩形} ABCD \text{的周长为} \underline{\hspace{2cm}}.$$



【答案】 36

【解析】 $\because \tan \angle EFC = \frac{3}{4},$

$$\therefore \text{设} CE = 3k, \text{则} CF = 4k, \text{由勾股定理得} EF = DE = 5k,$$

$$\therefore DC = AB = 8k,$$

$$\because \angle AFB + \angle BAF = 90^\circ, \angle AFB + \angle EFC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAF = \angle EFC,$$

$$\therefore \tan \angle BAF = \tan \angle EFC = \frac{3}{4},$$

$$\therefore BF = 6k, AF = BC = AD = 10k,$$

由勾股定理得 $AE = \sqrt{AF^2 + EF^2} = \sqrt{125k^2} = 5\sqrt{5}$, 解得 $k = 1$,

故 $ABCD$ 的周长为 $2(AB + BC) = 2(8k + 10k) = 36\text{cm}$.

【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理

【重点强调】

2017年天津河西区初三毕业考试第17题3分